DOI: https://doi.org/10.17816/fm429

Двойная экспоненциальная модель охлаждения трупа в условиях линейно изменяющейся внешней температуры

Г.В. Недугов

Самарский государственный медицинский университет, Самара, Российская Федерация

АННОТАЦИЯ

Обоснование. Основным условием корректного определения давности наступления смерти, одновременно ограничивающим область применения метода термометрии глубоких тканей трупа, является постоянство температуры внешней среды. Приоритет термометрии ядра тела в диагностике давности наступления смерти объясняется более медленным остыванием глубоких тканей, позволяющим увеличить продолжительность посмертного интервала, доступного диагностике, и меньшей подверженностью влиянию различных случайных факторов на процесс охлаждения. Предложенные в последнее время конечно-элементные модели могут учитывать практически все существенные условия охлаждения, в том числе и изменения внешней температуры, однако из-за своей высокой сложности требуют наличия серьёзной физико-математической подготовки и технических навыков, дорогостоящего программного обеспечения и посмертной компьютерной томографии. По этим причинам они не нашли пока широкого применения в экспертной практике.

В настоящей статье предложена математическая модель охлаждения ядра трупа при линейно изменяющейся внешней температуре.

Цель исследования. Построить математическую модель охлаждения ядра трупа на основе феноменологического закона Marshall-Hoare в условиях линейно изменяющейся внешней температуры; найти численный алгоритм решения построенной модели и разработать реализующую его компьютерную программу.

Материал и методы. На базе феноменологического закона охлаждения Marshall-Hoare выполнено прямое аналитическое моделирование охлаждения трупа в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды.

Результаты. Разработана математическая модель охлаждения ядра трупа в условиях линейно изменяющейся внешней температуры. В качестве численного алгоритма решения этой модели предложен метод хорд. Разработанная математическая модель и итерационный алгоритм её решения, а также вычисления интервальных оценок посмертного интервала реализованы на языке C# в формате компьютерной программы Warm Bodies MHNH.

Заключение. Предложенную модель и реализующую её программу целесообразно использовать в судебно-медицинской экспертной практике при определении давности наступления смерти по ректальной или краниоэнцефальной температуре трупа в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды.

Ключевые слова: охлаждение трупа; двойная экспоненциальная модель; давность наступления смерти; изменяющаяся внешняя температура; метод хорд.

Как цитировать

Недугов Г.В. Двойная экспоненциальная модель охлаждения трупа в условиях линейно изменяющейся внешней температуры // *Судебная медицина.* 2021. Т. 7, № 4. С. XX–XX. DOI: https://doi.org/10.17816/fm429

Рукопись получена: 16.09.2021 **Рукопись одобрена:** 08.12.2021 **Опубликована:** XX.XX.XXXX

DOI: https://doi.org/10.17816/fm429

Double exponential model of corpse cooling under conditions of linearly varying ambient temperature

German V. Nedugov

Samara State Medical University, Samara, Russia Federation

ABSTRACT

BACKGROUND: The main condition for the correctness of determining the postmortem interval by the method of thermometry of the deep tissues of the corpse is the constancy of the ambient temperature. This condition significantly limits the range of application of the method. The priority of thermometry of the core of the body in the diagnosis of prescription of death is explained by the slower cooling of deep tissues, which allows to increase the duration of the postmortem interval available for diagnosis, and less exposure to the influence of various random factors on the cooling process. The finite element models proposed recently can take into account almost all essential cooling conditions, including changes in ambient temperature, however, due to their high complexity, they require serious physical and mathematical training and technical skills, expensive software and postmortem computed tomography. For these reasons, they have not yet found wide application in expert practice.

In this article, a mathematical model of cooling the core of a corpse at a linearly varying ambient temperature is proposed.

AIMS: Construction a mathematical model of cooling the core of a corpse based on the Marshall-Hoare phenomenological law under conditions of linearly varying external temperature, to find a numerical algorithm for solving the model and to develop a computer program that implements it.

MATERIAL AND METHODS: A direct analytical modeling of the corpse cooling under conditions of linearly varying ambient temperature was carried out, performed on the basis of the Marshall-Hoare phenomenological cooling law and focused on solving the problem of determination of the postmortem interval by rectal or cranioencephalic temperature.

RESULTS: A mathematical model of cooling the core of a corpse under conditions of linearly varying ambient temperature has been developed. The chord method is proposed as a numerical algorithm for solving this model. The developed mathematical model and an iterative algorithm for its solution, as well as procedures for calculating interval estimates of the postmortem interval, are implemented in the C# language in the format of the Warm Bodies MHNH computer program.

CONCLUSIONS: It is advisable to use the proposed model and the program implementing it in forensic medical expert practice when determining the postmortem interval by the rectal or cranioencephalic temperature of a corpse in conditions of linearly varying ambient temperature.

Keywords: corpse cooling; double exponential model; postmortem interval; changing ambient temperature; chord method.

To cite this article

Nedugov GV. Double exponential model of corpse cooling under conditions of linearly varying ambient temperature. *Russian Journal of Forensic Medicine.* 2021;7(4):XX–XX. DOI: https://doi.org/10.17816/fm429

Received: 16.09.2021 **Accepted:** 08.12.2021 **Published:** XX.XX.XXXX

ОБОСНОВАНИЕ

Термометрическое определение давности наступления смерти (ДНС) по-прежнему строится с учётом степени охлаждения практически одних лишь только глубоких тканей трупа. Приоритет термометрии ядра тела в диагностике ДНС объясняется более медленным остыванием глубоких тканей, позволяющим увеличить продолжительность посмертного интервала, доступного диагностике, и меньшей подверженностью влиянию различных случайных факторов на процесс охлаждения. Наиболее востребованными диагностическими показателями при этом остаются ректальная и краниоэнцефальная температура, а основой определения ДНС является предложенная в 1962 г. T.K. Marshall и F.E. Hoare феноменологическая модель вида

$$\frac{T - T_a}{T_0 - T_a} = \frac{p}{p-k} e^{-kt} - \frac{k}{p-k} e^{-pt}, \qquad (1)$$

где T — текущая температура ядра тела, °С; T_a — температура внешней среды, °С; T_0 — начальная температура в момент наступления смерти человека, °С; k — постоянная охлаждения; p — постоянная температурного плато; t — ДНС, ч [1].

Модель (1) охлаждения ядра трупа была построена T.K. Marshall и F.E. Hoare путём введения в закон охлаждения Ньютона-Рихмана $[\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)]$, предназначенный для описания остывания поверхностей физических тел, дополнительной экспоненциальной функции, аппроксимировавшей феномен температурного плато. С учётом этого закон охлаждения ядра трупа при постоянной температуре внешней среды приобрёл вид дифференциального уравнения

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) + Ce^{-pt}, \qquad (2)$$

где C — коэффициент пропорциональности дополнительной экспоненциальной функции, определяемый как

$$C = k(T_0 - T_a). \qquad (3)$$

Решением дифференциального уравнения (2) и явилась феноменологическая модель (1), получившая из-за наличия в своей структуре второй экспоненциальной функции наименование двойной экспоненциальной. Следует отметить, что в строгом смысле двойной экспоненциальной называется функция с наличием второй экспоненты в показателе степени:

$$f(x) = e^{\left(e^{x}\right)}.$$

В этой связи модель охлаждения (1) Marshall-Hoare представляет собой не двойную экспоненциальную, а сумму двух отдельных экспоненциальных функций. Однако термин «двойная экспоненциальная модель» прочно укоренился в судебно-медицинской научной литературе, поэтому при дальнейшем изложении данным термином, согласно сложившейся традиции, будет именоваться сумма двух «простых» экспоненциальных функций.

В 1988 г. немецкий судебный медик C. Henssge предложил собственные методы генерации значений постоянных охлаждения и температурного плато в модели (1) и осуществил масштабную проверку её точности на экспериментальном материале и практических наблюдениях. В результате, модификации C. Henssge позволили определять не только точечные, но и интервальные оценки ДНС с учётом характера одежды на трупе, особенностей его ложа и внешней среды [2, 3].

Наиболее существенный и вследствие этого сильно ограничивающий область применения недостаток двойной экспоненциальной модели (1) характеризуется её корректностью только при постоянной температуре внешней среды. По этой причине закономерными явились многочисленные попытки адаптации модели (1) к условиям изменяющейся внешней температуры. В результате удалось разработать эмпирические модификации двойной экспоненциальной модели, позволившие определять ДНС при однократном дискретном снижении или повышении внешней температуры с последующим сохранением её постоянства [4, 5]. Однако построить феноменологическую модель охлаждения ядра тела для остальных типов возможных изменений внешней температуры, имеющих более актуальное значение, до сих пор так и не удалось.

Вместе с тем основной недостаток двойной экспоненциальной модели (1), связанный с её непригодностью при изменяющейся внешней температуре, может быть преодолен путём обобщения закона (2) на указанные условия охлаждения тела. В целом решать подобные задачи возможно методами прямого или обратного моделирования охлаждения трупа [6]. Однако к уравнению (2) Marshall-Hoare из-за наличия в его структуре дополнительной экспоненциальной функции температурного плато, содержащей в качестве одной из переменных показатель ДНС, применим только метод прямого моделирования. Последний, в свою очередь, также может быть успешно использован только при условии постоянства скорости изменений внешней температуры, т.е. при соответствии изменений температуры внешней среды линейному закону [6]. В связи с тем, что двойная экспоненциальная модель, как и любая её модификация, представляет собой неявно заданную функцию, которую невозможно преобразовать с выведением показателя ДНС в явном виде, актуальным при построении модификаций уравнения (1) является также поиск численного алгоритма их решения с последующей его реализацией в формате компьютерной программы [7].

Цель исследования — построение математической модели охлаждения ядра трупа на основе феноменологического закона Marshall-Hoare в условиях линейно изменяющейся внешней температуры; поиск численного алгоритма решения построенной модели и последующая его реализация в формате компьютерной программы.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

Методологический дизайн исследования представляет собой математическое моделирование охлаждения ядра трупа в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды, выполненное на базе феноменологического закона охлаждения Marshall-Hoare и ориентированное на решение задачи определения ДНС по ректальной или краниоэнцефальной температуре.

Математическое моделирование осуществляли прямым аналитическим методом с использованием приложения Wolfram|Alpha. Частные решения построенной математической модели охлаждения ядра трупа получали методом хорд. Вычислительные процедуры, связанные с реализацией итерационного алгоритма метода хорд, производили с использованием приложений Microsoft Excel пакета Office 2016. Визуализацию кривых охлаждения выполняли с помощью приложения Statistica (StatSoft) версии 7.0. Код программы для ЭВМ, реализующей построенную математическую модель охлаждения ядра трупа, а также итерационный алгоритм её решения, составляли на языке программирования C# с использованием приложения Microsoft Visual Studio 2019.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Метод построения основанной на законе Marshall-Hoare модели охлаждения ядра тела в условиях линейно изменяющейся внешней температуры связан с заменой в дифференциальном уравнении (2) константы температуры внешней среды на соответствующую линейную функцию и последующим решением полученного дифференциального уравнения.

Пусть труп с начальной температурой в диагностической зоне T_0 находится в среде с начальной температурой T_{a0}, и охлаждение ядра тела протекает согласно уравнению (2) Marshall-Hoare с постоянными коэффициентами k и p. В процессе охлаждения температура внешней среды изменяется линейно по закону

$$T_a = T_{a0} + \beta t, \tag{4}$$

где β — скорость изменения внешней температуры, °С/ч.

Необходимо описать динамику температуры ядра тела в указанных условиях.

Для линейно изменяющейся внешней температуры в дифференциальном уравнении (2) следует заменить показатель T_a, в том числе и в составе константы дополнительной экспоненциальной функции (3), линейным уравнением (4):

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{a0} - \beta t) + k(T_0 - T_{a0} - \beta t)e^{-pt}. \tag{5}$$

Решением полученного дифференциального уравнения (5) является функция

$$T = T_{a0} + \beta\left(t - \frac{1}{k}\right) + \left(T_0 - T_{a0} + \frac{\beta}{k}\right)e^{-kt} + \\ + \frac{k}{k-p} \times \left(\left(T_0 - T_{a0} - \frac{\beta(kt - pt - 1)}{k-p}\right)e^{-pt} - \\ - \left(T_0 - T_{a0} + \frac{\beta}{k-p}\right)e^{-kt}\right). \tag{6}$$

Из условия (4) следует, что

$$T_{a0} = T_a - \beta t\,, \tag{7}$$

Подставляя правую часть (7) вместо T_{a0} в формулу (6), окончательно находим феноменологический закон охлаждения ядра тела в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды:

$$T(t) = T_a - \frac{\beta}{k} + \left(T_0 - T_a + \beta t + \frac{\beta}{k}\right)e^{-kt} + \frac{k}{k-p} \times \\ \times \left(\left(T_0 - T_a + \beta t - \frac{\beta(kt - pt - 1)}{k-p}\right)e^{-pt} - \\ - \left(T_0 - T_a + \beta t + \frac{\beta}{k-p}\right)e^{-kt}\right). \tag{8}$$

Классическая модель (1) Marshall-Hoare, найденная при равной нулю скорости изменения внешней температуры, т.е. при её постоянстве, является частным случаем общего уравнения (8). Аналогично закон охлаждения (2) является частным случаем уравнения (5).

Как и в классической модели (1) Marshall-Hoare, неизвестные коэффициенты k и p в уравнении (8) не могут быть однозначно определены путём динамической термометрии трупа. Именно поэтому постоянные охлаждения и температурного плато по-прежнему целесообразно определять в соответствии с рекомендациями C. Henssge [2, 3, 8, 9].

Пример 1

Труп массой 100,0 кг обнаружен в безветренную погоду лежащим на сухой земле в затенённом месте. На трупе два слоя тонкой одежды. Ректальная температура трупа 34,10°С, краниоэнцефальная — 26,16°С. Температура воздуха на уровне тела на момент его осмотра составила 22,0°С, при этом в предшествующие осмотру 10 ч температура воздуха возрастала по линейному закону со скоростью 0,5°С/ч. Необходимо определить ДНС.

Согласно C. Henssge, корректирующий фактор для трупа массой 70 кг в тонкой двухслойной одежде равен 1,1 [3, 8, 9]. Адаптация корректирующего фактора для ложа

! формулы оставил исходные, но просьба сверить / красным в тексте формулы которые набирал

трупа не проводится. Адаптацию корректирующего фактора по массе тела находим по формуле

$$f=\frac{\left[\frac{-1{,}2815}{-3{,}24596e^{-0{,}89959\cdot 1{,}1}\cdot\left(100^{-0{,}625}-0{,}028\right)-0{,}0354}\right]^{1{,}6}}{100}=1{,}06043.$$

Тогда

$k=0{,}0284-1{,}2815(1{,}06043\cdot 100)^{-0{,}625}=-0{,}04107$.

Поскольку модель (8) является обобщением уравнения (1) Marshall-Hoare, то она предполагает положительное значение постоянной охлаждения, поэтому для дальнейших расчетов возьмём последнюю с противоположным знаком.

Так как температура окружающей среды на момент осмотра трупа и в предшествующий ему период была меньше 23,2°С, то константа температурного плато в данном случае равна $p=5k=5\cdot 0{,}04107=0{,}205346$.

Тогда

$$0=\left(37{,}2-22+0{,}5t+\frac{0{,}5}{0{,}041107}\right)e^{-0{,}041107t}+22-\frac{0{,}5}{0{,}041107}+\frac{0{,}041107}{0{,}041107-0{,}205346}\times$$
$$\times\left(\begin{array}{l}\left(37{,}2-22+0{,}5t-\frac{0{,}5(0{,}041107t-0{,}205346t-1)}{0{,}041107-0{,}205346}\right)e^{-0{,}205346t}-\\-\left(37{,}2-22+0{,}5t+\frac{0{,}041107}{0{,}041107-0{,}205346}\right)e^{-0{,}041107t}\end{array}\right)-34{,}1. \quad (9)$$

Решением неявного уравнения (9) является t=9,30 ч. Без учёта изменений внешней температуры оценка ДНС равнялась бы 10,03 ч, а относительная ошибка её определения составила 7,8%.

Пример 2

Найдем ДНС по краниоэнцефальной температуре для данных примера 1. Согласно C. Henssge, константы двойной экспоненциальной модели принимают следующие значения [9]: $k=0{,}127$ и $p=1{,}07$.

Тогда

$$0=22+\left(37{,}2-22+0{,}5t+\frac{0{,}5}{0{,}127}\right)e^{-0{,}127t}+\frac{0{,}127}{0{,}127-1{,}07}\times$$
$$\times\left(\begin{array}{l}\left(37{,}2-22+0{,}5t-\frac{0{,}5(0{,}127t-1{,}07t-1)}{0{,}127-1{,}07}\right)e^{-1{,}07t}-\\-\left(37{,}2-22+0{,}5t+\frac{0{,}127}{0{,}127-1{,}07}\right)e^{-0{,}127t}\end{array}\right)-\frac{0{,}5}{0{,}127}-26{,}16. \quad (10)$$

Итерационным методом находим, что t=9,30 ч. Без учёта изменений внешней температуры оценка ДНС равнялась бы 11,18 ч, а относительная ошибка её определения составила уже 20,2%.

Геометрическая интерпретация результатов изложенных примеров приведена на рис. 1, на котором температурный тренд внешней среды условно продолжен до 26 ч посмертного периода. Это позволило визуализировать факт соответствия температуры обеих диагностических точек температуре внешней среды после их выравнивания.

Уравнение (8) также представляет собой неявно заданную функцию, на основе которой невозможно аналитическое определение ДНС. Однако значение (8) может быть найдено с помощью численных методов. Для этого необходимо преобразовать уравнение (8) путём переноса переменной T в его правую часть и найти численным методом значение ДНС, обращающее полученную функцию вида $f(t)=0$ в нуль. Так, подобным образом частные случаи модели (8) в примерах 1 и 2 преобразованы в уравнения (9) и (10).

В качестве численного метода решения двойных экспоненциальных моделей охлаждения трупа был предложен метод касательных Ньютона [7]. Однако при попытках

! рисунки 1-3 перенабирал - просьба сверить

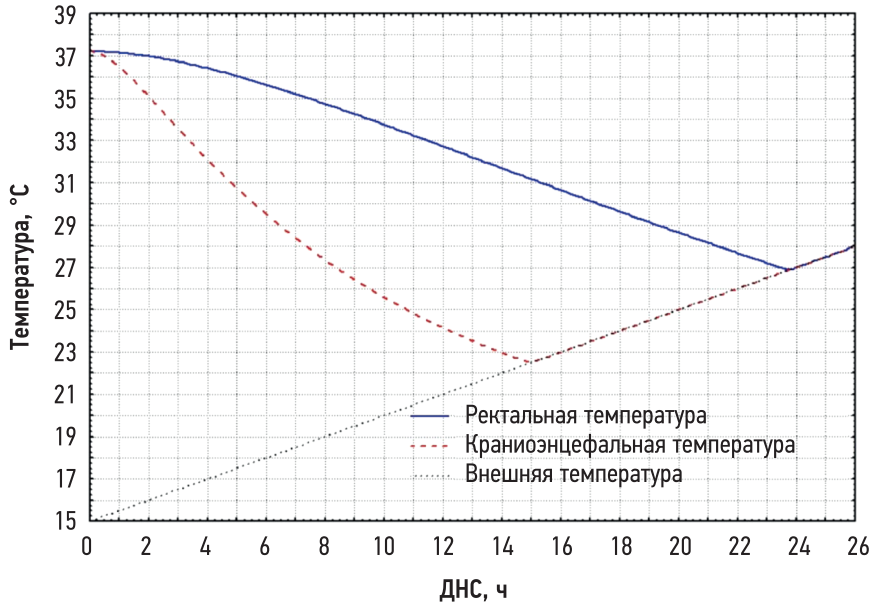


Рис. 1. Температурные кривые из примеров 1 и 2.
Примечание. ДНС — давность наступления смерти.

Fig. 1. Temperature curves from examples 1 and 2.
Note. ДНС — the postmortem interval, hours.

решения методом Ньютона выяснилось, что полученная от (8) неявная функция имеет два корня, один из которых является искомым решением, а второй — отрицательным числом (рис. 2). При этом метод Ньютона практически при любых начальных значениях t_0 сходится к отрицательному корню уравнения. По этой причине положительный корень уравнений (9), (10) и остальных частных случаев модели (8) было решено находить с помощью иного численного алгоритма — метода хорд, в рамках которого сущность итерационного процесса определяется формулой

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f(t_n) - f(t_0)}(t_n - t_0), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

где t_0 и t_n — начальные значения концов отрезка со значениями ДНС, первый из которых с абсциссой t_0 является неподвижным, а второй сходится к положительному корню.

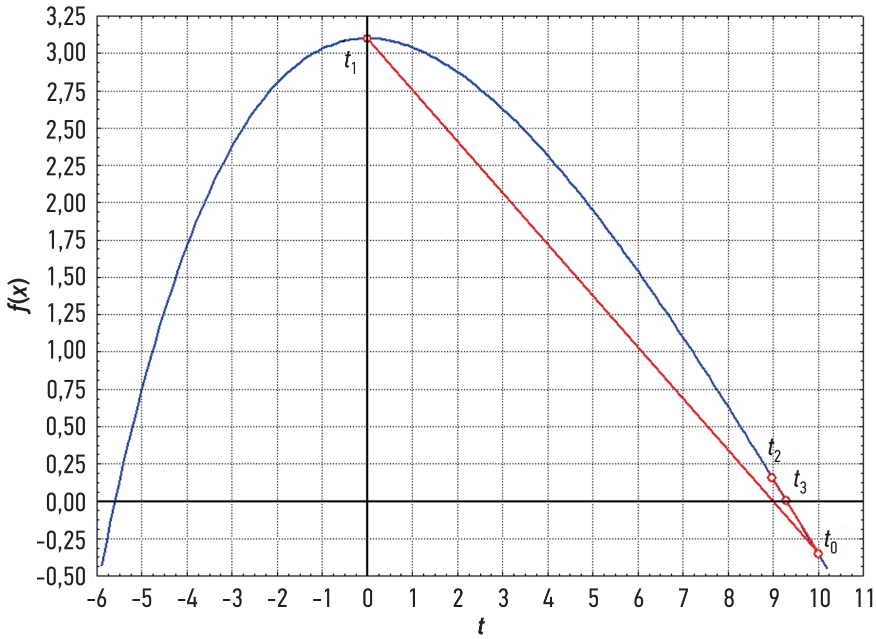


Рис. 2. Геометрия решения уравнения (9) методом хорд для данных примера 1. Показаны первые 3 итерации при t_0=10 и t_1=0,1 ч.

Fig. 2. The geometry of the solution of equation (9) by the chord method for the data of Example 1. The first 3 iterations are shown at t_0=10 and t_1=0,1 h.

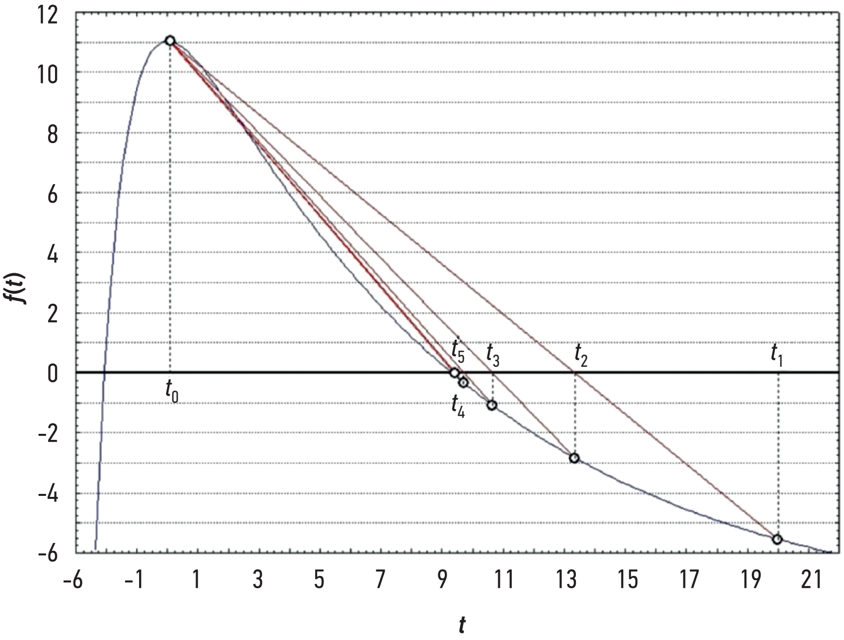


Рис. 3. Геометрия решения уравнения (10) методом хорд для данных примера 2. Показаны первые 5 итераций при t_0=0,1 и t_1=20 ч.
Fig. 3. The geometry of the solution of equation (10) by the chord method for the data of Example 2. The first 5 iterations are shown at t_0=0,1 and t_1=20 h.

Выбор неподвижного конца хорды определяется формой неявной функции в области положительных значений переменной *t*. В случаях, когда данная функция на указанном промежутке является выпуклой кверху, в качестве неподвижного следует выбирать правый конец хорды (см. рис. 2). Подобная форма неявных функций имеет место при определении ДНС по ректальной температуре с оценкой констант охлаждения и температурного плато методом Henssge. Если же функция на указанном промежутке является выпуклой книзу, что наблюдается при определении ДНС по краниоэнцефальной температуре, то неподвижным нужно принять левый её конец (рис. 3).

Учитывая, что асимптотическая скорость сходимости метода хорд меньше, чем метода Ньютона, для нахождения корня (9) с точностью до 2 знаков в дробной части результата требуется всего 3, а с точностью до 9 знаков — 8 итераций.

Метод хорд может быть легко реализован с помощью наиболее распространённого табличного процессора Microsoft Excel. Структура рабочей области в Excel, предназначенной для решения уравнения (8), зависит от метода вычисления констант охлаждения и температурного плато. Общей чертой любой такой рабочей области является наличие в её составе разделов для введения исходных физических величин, вычисления значений констант охлаждения и температурного плато и собственно реализации метода хорд (рис. 4).

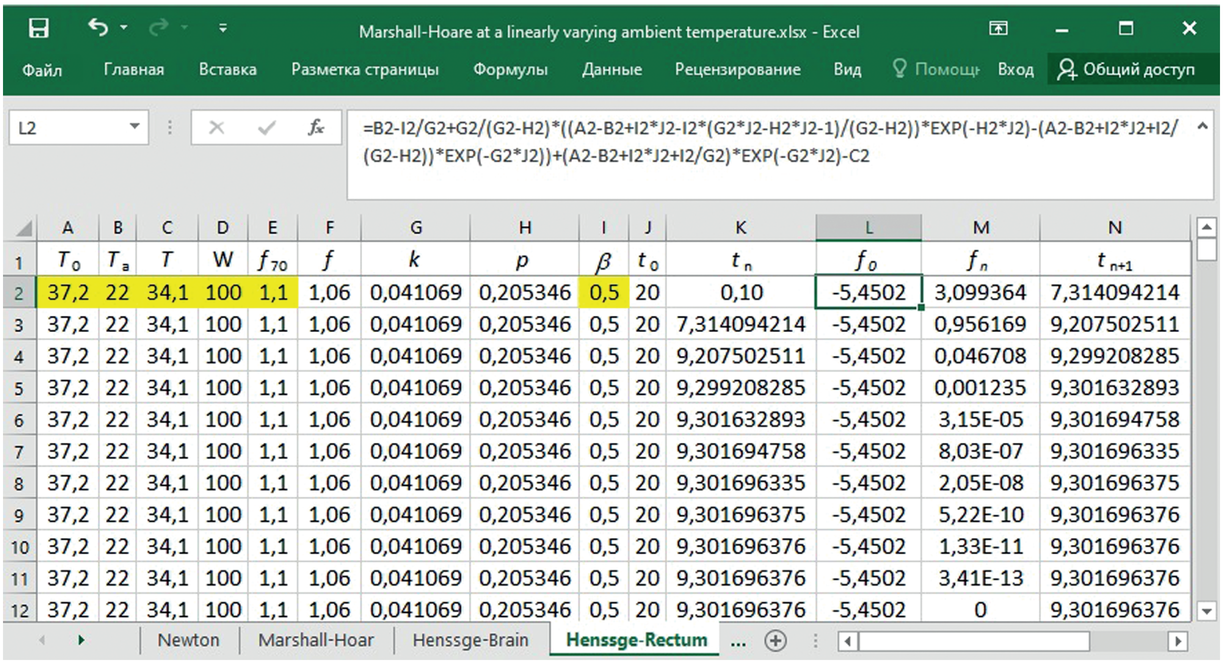
Интервальные оценки ДНС в условиях линейно изменяющейся внешней температуры могут быть определены по тем же принципам, что и аналогичные оценки по методу C. Henssge [2, 8, 9]. Применение этого метода оправдано, поскольку все модели C. Henssge являются частными случаями уравнения (8).

Для удобства математическая модель (8) и итерационный алгоритм её решения, а также вычисления интервальных оценок ДНС были реализованы на языке C# в формате программы Warm Bodies MHNH (свидетельство о государственной регистрации № 2021664764).

Значения постоянных охлаждения и температурного плато приложение определяет в соответствии с рекомендациями C. Henssge [8, 9]. Кроме точечных возможно также определение одно- и двусторонних интервальных оценок ДНС при любом уровне доверительной вероятности. Интервальные оценки ДНС приложение определяет путём вычисления остаточного стандартного отклонения на основе регрессионных аппроксимаций [10].

При определении ДНС по ректальной температуре из-за различий значений константы температурного плато и, следовательно, структуры модели (8) в зависимости от внешней температуры в случаях, когда внешняя температура в посмертном периоде сначала была меньше, а затем больше 23,2 °C, или наоборот, приложение Warm Bodies MHNH вычисляет константу температурного плато по формуле $p = 7{,}5k$.

Для работы с программой пользователю необходимо выбрать требуемую диагностическую зону трупа, указать её начальную температуру, результаты измерения температуры тела и внешней среды на момент осмотра трупа, величину статистической ошибки и почасовую скорость изменения температуры внешней среды. При выборе ректальной температуры в качестве измеряемого показателя дополнительно требуется указать вес трупа и значение корректирующего фактора для условий охлаждения


Marshall-Hoare at a linearly varying ambient temperature.xlsx - Excel

Файл Главная Вставка Разметка страницы Формулы Данные Рецензирование Вид Помощь Вход Общий доступ

L2 =B2-I2/G2+G2/(G2-H2)*((A2-B2+I2*J2-I2*(G2*J2-H2*J2-1)/(G2-H2))*EXP(-H2*J2)-(A2-B2+I2*J2+I2/(G2-H2))*EXP(-G2*J2))+(A2-B2+I2*J2+I2/G2)*EXP(-G2*J2)-C2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	T_0	T_a	T	W	f_{70}	f	k	p	β	t_0	t_n	f_0	f_n	t_{n+1}
2	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	0,10	-5,4502	3,099364	7,314094214
3	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	7,314094214	-5,4502	0,956169	9,207502511
4	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,207502511	-5,4502	0,046708	9,299208285
5	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,299208285	-5,4502	0,001235	9,301632893
6	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,301632893	-5,4502	3,15E-05	9,301694758
7	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,301694758	-5,4502	8,03E-07	9,301696335
8	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,301696335	-5,4502	2,05E-08	9,301696375
9	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,301696375	-5,4502	5,22E-10	9,301696376
10	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,301696376	-5,4502	1,33E-11	9,301696376
11	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,301696376	-5,4502	3,41E-13	9,301696376
12	37,2	22	34,1	100	1,1	1,06	0,041069	0,205346	0,5	20	9,301696376	-5,4502	0	9,301696376

Newton Marshall-Hoar Henssge-Brain Henssge-Rectum ...

Рис. 4. Рабочая область Excel с данными примера 1 для решения функции (9) применительно к ректальной температуре методом хорд. Жёлтым цветом выделены ячейки, предназначенные для ввода исходных физических величин. Остальные числовые данные генерируются автоматически.

Fig. 4. The Excel workspace with the data of Example 1 for solving the function (9) in relation to rectal temperature by the chord method. The cells intended for the introduction of initial physical quantities are highlighted in yellow. The remaining numeric data is generated automatically.

и ложа трупа массой 70 кг. Адаптация корректирующего фактора по массе трупа осуществляется приложением. При нулевой скорости изменения внешней температуры (β=0) результат работы программы эквивалентен таковому стандартного метода Henssge.

ОБСУЖДЕНИЕ

Основной недостаток феноменологической модели охлаждения Marshall-Hoare связан с её применимостью только в условиях постоянной внешней температуры. Многочисленные исследования, направленные на адаптацию модели (1) к условиям меняющейся температуры окружающей среды, привели лишь к разработке эмпирических модификаций данной модели, предназначенных для определения ДНС при однократном дискретном снижении или повышении внешней температуры с последующим сохранением её постоянства [4, 5]. Подобные изменения условий охлаждения наблюдаются, например, при однократных перемещениях трупа в среду с иной постоянной температурой. Однако каких-либо математических моделей, основанных на феноменологическом законе охлаждения Marshall-Hoare или на предназначенных для глубокой термометрии аппроксимациях закона охлаждения Ньютона-Рихмана и пригодных для использования при монотонных изменениях внешней температуры, предложено не было. Именно поэтому основные усилия исследователей в последние десятилетия сконцентрировались на построении сложных конечно-элементных моделей посмертного теплообмена [11–13]. Предложенные конечно-элементные модели могут учитывать практически все существенные условия охлаждения, в том числе и изменения внешней температуры, однако из-за своей высокой сложности требуют наличия серьёзной физико-математической подготовки и технических навыков, дорогостоящего программного обеспечения и посмертной компьютерной томографии. По этим причинам они не нашли пока широкого применения в экспертной практике.

В рамках настоящего исследования феноменологический закон охлаждения Marshall-Hoare распространён на случай линейных изменений внешней температуры. На основе указанного обобщения построена феноменологическая модель (8) охлаждения ядра трупа в условиях линейно изменяющейся температуры окружающей среды. Поскольку уравнение (8) представляет собой неявно заданную функцию, не допускающую возможность аналитического нахождения ее корней, предложено находить их численными методами, наиболее подходящим из которых оказался метод хорд. Данный итерационный метод может быть легко воспроизведён с помощью табличного процессора Excel или приложения Warm Bodies MHNH, написанного на языке C#.

Корректность результатов модели (8) сохраняется только при отсутствии таких факторов изменчивости постоянных охлаждения и температурного плато, как инсоляция, естественная или принудительная конвекция, изменения условий охлаждения мёртвого тела. Кроме того, на практике колебания температуры внешней среды вне помещений обычно имеют линейный характер в период времени продолжительностью до 12 ч, реже дольше. Иногда указанные колебания на больших временных промежутках удаётся аппроксимировать линейной регрессией, однако в большинстве случаев модель (8) может быть востребована лишь в первые 12 ч, предшествующие осмотру трупа на месте его обнаружения.

Не исключено, что использование в модели (8) эмпирических коэффициентов, оценённых C. Henssge в условиях постоянной внешней температуры, может повлиять на результаты определения ДНС при значительных изменениях температуры окружающей среды. Обнаружение подобного влияния потребует адаптации процедуры задания коэффициентов модели (8) для той скорости изменений внешней температуры и их перепадов, при которых оно будет выявлено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель охлаждения ядра трупа в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды, основанная на феноменологическом законе охлаждения Marshall-Hoare. Классическая двойная экспоненциальная модель Marshall-Hoare является частным случаем новой модели, реализуемым при нулевой скорости изменения внешней температуры. В качестве численного алгоритма решения разработанной математической модели предложен метод хорд.

Разработанная математическая модель и итерационный алгоритм её решения, а также процедуры вычисления интервальных оценок ДНС реализованы на языке C# в формате компьютерной программы Warm Bodies MHNH.

Предложенный метод и реализующую его компьютерную программу целесообразно использовать в судебно-медицинской экспертной практике при определении ДНС по ректальной или краниоэнцефальной температуре трупа в условиях линейно изменяющейся температуры внешней среды.

ДОПОЛНИТЕЛЬНО

Источник финансирования. Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

Конфликт интересов. Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

Вклад авторов. Автор подтверждает соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (разработка концепции, проведение исследования и подготовка статьи, одобрение финальной версии перед публикацией).

ADDITIONAL INFORMATION

Funding source. This study was not supported by any external sources of funding.

Competing interests. The author declare that they have no competing interests.

Authors' contribution. The author made a substantial contribution to the conception of the work, acquisition, analysis, interpretation of data for the work, drafting and revising the work, final approval of the version to be published and agree to be accountable for all aspects of the work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marshall T.K., Hoare F.E. Estimating the time of death. The rectal cooling after death and its mathematical expression // J Forensic Sci. 1962. Vol. 7, N 1. P. 56–81.

2. Henssge C. Death time estimation in case work. I. The rectal temperature time of death nomogram // Forensic Sci Int. 1988. Vol. 38, N 3-4. P. 209–236. doi: 10.1016/0379-0738(88)90168-5

3. Henssge C. Rectal temperature time of death nomogram: dependence of corrective factors on the body weight under stronger thermic insulation conditions // Forensic Sci Int. 1992. Vol. 54, N 1. P. 51–66. doi: 10.1016/0379-0738(92)90080-g

4. Althaus L., Henssge C. Rectal temperature time of death nomogram: sudden change of ambient temperature // Forensic Sci Int. 1999. Vol. 99, N 3. P. 171–178. doi: 10.1016/s0379-0738(98)00188-1

5. Bisegna P., Henssge C., Althaus L., Giusti G. Estimation of the time since death: sudden increase of ambient temperature // Forensic Sci Int. 2008. Vol. 176, N 2-3. P. 196–199. doi: 10.1016/j.forsciint.2007.09.007

6. Недугов Г.В. Математическое моделирование охлаждения трупа в условиях изменяющейся температуры окружающей среды // Судебная медицина. 2021. Т. 7, N 1. С. 29–35. doi: 10.17816/fm360

7. Недугов Г.В. Численный метод решения двойных экспоненциальных моделей охлаждения трупа при установлении давности наступления смерти // Судебно-медицинская экспертиза. 2021. Т. 64, N 6. С. 25–28. doi: 10.17116/sudmed20216406125

8. Madea B. Methods for determining time of death // Forensic Sci Med Pathol. 2016. Vol. 12, N 4. P. 451–485. doi: 10.1007/s12024-016-9776-y

9. Henssge C., Madea B. Estimation of the time since death in the early post-mortem period // Forensic Sci Int. 2004. Vol. 144, N 2-3. P. 167–175. doi: 10.1016/j.forsciint.2004.04.051

10. Недугов Г.В. Новые компьютерные технологии определения давности наступления смерти по методу Henssge // Судебная медицина. 2021. Т. 7, N 3. С. 152–158. doi: 10.17816/fm406

11. Mall G., Eisenmenger W. Estimation of time since death by heat-flow Finite-Element model. Part I: method, model, calibration and validation // Leg Med (Tokyo). 2005. Vol. 7, N 1. P. 1–14. doi: 10.1016/j.legalmed.2004.06.006

12. Mall G., Eisenmenger W. Estimation of time since death by heat-flow Finite-Element model. Part II: application to non-standard cooling conditions and preliminary results in practical casework // Leg Med (Tokyo). 2005. Vol. 7, N 2. P. 69–80. doi: 10.1016/j.legalmed.2004.06.007

13. Schenkl S., Muggenthaler H., Hubig M., et al. Automatic CT-based finite element model generation for temperature-based death time estimation: feasibility study and sensitivity analysis // Int J Legal Med. 2017. Vol. 131, N 3. P. 699–712. doi: 10.1007/s00414-016-1523-0

REFERENCES

1. Marshall TK, Hoare FE. Estimating the time of death. The rectal cooling after death and its mathematical expression. *J Forensic Sci*. 1962;7(1):56–81.

2. Henssge C. Death time estimation in case work. I. The rectal temperature time of death nomogram. *Forensic Sci Int*. 1988;38(3-4):209–236. doi: 10.1016/0379-0738(88)90168-5

3. Henssge C. Rectal temperature time of death nomogram: dependence of corrective factors on the body weight under stronger thermic insulation conditions. *Forensic Sci Int*. 1992;54(1):51–66. doi: 10.1016/0379-0738(92)90080-g

4. Althaus L, Henssge C. Rectal temperature time of death nomogram: sudden change of ambient temperature. *Forensic Sci Int*. 1999;99(3):171–178. doi: 10.1016/s0379-0738(98)00188-1

5. Bisegna P, Henssge C, Althaus L, Giusti G. Estimation of the time since death: sudden increase of ambient temperature. *Forensic Sci Int*. 2008;176(2-3):196–199. doi: 10.1016/j.forsciint.2007.09.007

6. Nedugov GV. Mathematical modeling of the corpse cooling under conditions of varying ambient temperature. *Russian Journal of Forensic Medicine*. 2021;7(1):29–35. (In Russ.) doi: 10.17816/fm360

7. Nedugov GV. Numerical method for solving double exponential models of corpse cooling in the determination of the time of death. *Forensic Medical Expertise*. 2021;64(6):25–28. (In Russ.) doi: 10.17116/sudmed20216406125

8. Madea B. Methods for determining time of death. *Forensic Sci Med Pathol*. 2016;12(4):451–485. doi: 10.1007/s12024-016-9776-y

9. Henssge C, Madea B. Estimation of the time since death in the early post-mortem period. *Forensic Sci Int*. 2004;144(2-3):167–175. doi: 10.1016/j.forsciint.2004.04.051

10. Nedugov GV. New computer technologies for determining the postmortem interval by the Henssge method. *Russian Journal of Forensic Medicine*. 2021;7(3):152–158. (In Russ.) doi: 10.17816/fm406

11. Mall G, Eisenmenger W. Estimation of time since death by heat-flow Finite-Element model. Part I: method, model, calibration and validation. *Leg Med (Tokyo)*. 2005;7(1):1–14. doi: 10.1016/j.legalmed.2004.06.006

12. Mall G, Eisenmenger W. Estimation of time since death by heat-flow Finite-Element model. Part II: application to non-standard cooling conditions and preliminary results in practical casework. *Leg Med (Tokyo)*. 2005;7(2):69–80. doi: 10.1016/j.legalmed.2004.06.007

13. Schenkl S, Muggenthaler H, Hubig M, et al. Automatic CT-based finite element model generation for temperature-based death time estimation: feasibility study and sensitivity analysis. *Int J Legal Med*. 2017;131(3):699–712. doi: 10.1007/s00414-016-1523-0

ОБ АВТОРАХ

Недугов Герман Владимирович, д.м.н., доцент;
адрес: Российская Федерация, 443099, Самара, ул. Чапаевская, д. 89; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7380-3766;
eLibrary SPIN: 3828-8091; e-mail: nedugovh@mail.ru

AUTHORS INFO

German V. Nedugov, MD, Dr. Sci. (Med.), Associate Professor;
address: 89 Chapaevskaya street, Samara, 443099, Russia;
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7380-3766;
eLibrary SPIN: 3828-8091; e-mail: nedugovh@mail.ru