Russian Journal of Forensic Medicine • ISSN: 2411-8729
Vol. 7 | Issue 2 | 2021

https://doi.org/10.17816/fm373

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАВНОСТИ НАСТУПЛЕНИЯ СМЕРТИ НА ОСНОВЕ ЗАКОНА ОХЛАЖДЕНИЯ НЬЮТОНА–РИХМАНА

Г.В. Недугов*

Самарский государственный медицинский университет, Самара, Российская Федерация

АННОТАЦИЯ. ***Актуальность.*** *Обязательным элементом разработки и внедрения диагностических технологий определения давности наступления смерти тепловым методом является оценка их возможных погрешностей. Для уравнений охлаждения трупа, имеющих детерминистский характер, оценка погрешностей возможна на основе математической модели косвенного измерения. В настоящей статье предложена математическая модель оценки предельных абсолютных погрешностей определения давности наступления смерти на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана в условиях постоянной и изменяющейся температуры внешней среды.* ***Цель исследования*** *— разработать метод оценки погрешностей определения давности наступления смерти на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана с учетом математической модели косвенного измерения.* ***Материал и методы.*** *Осуществлено математическое моделирование погрешностей определения давности наступления смерти в условиях постоянной и изменяющейся температуры окружающей среды на базе закона Ньютона–Рихмана. Код программы для электронно-вычислительной машины написан на языке программирования C# с использованием приложения Microsoft Visual Studio 2019.* ***Результаты.*** *На основе модели косвенного измерения разработан метод оценки предельных абсолютных погрешностей определения давности наступления смерти при охлаждении по закону Ньютона–Рихмана в условиях постоянной и изменяющейся температуры внешней среды. Разработанная математическая модель реализована в формате прикладной программы Warm Bodies NRN. Полученные результаты позволяют осуществлять аналитическое определение погрешностей установления давности наступления смерти в раннем посмертном периоде.* ***Заключение.*** *Разработанный метод целесообразно использовать в судебно-медицинской экспертной практике при определении давности наступления смерти.*

Ключевые слова: *погрешности; давность наступления смерти; закон охлаждения Ньютона–Рихмана; математическое моделирование; косвенное измерение.*

Для цитирования: Недугов Г.В. Математическое моделирование погрешностей определения давности наступления смерти на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана. *Судебная медицина*. 2021;7(2):88–95. DOI: https://doi.org/10.17816/fm373

Поступила 19.02.2021 Принята после доработки 24.02.2021 Опубликована 19.05.2021

MATHEMATICAL MODELING OF ERRORS FOR DETERMINING TIME OF DEATH BASED ON THE NEWTON'S–RICHMAN'S COOLING LAW

German V. Nedugov*

Samara State Medical University, Samara, Russian Federation

ABSTRACT. ***Background:*** *A mandatory factor in the development and implementation of diagnostic technologies for determining the time of death by the thermal method is the assessment of possible errors. For equations of cadaver cooling that have a deterministic character, error estimation is possible using a mathematical model of indirect measurement. Here, a mathematical model has been proposed for estimating the maximum absolute error in determining death on the basis of the Newton's–Richman's cooling law under conditions of constant and changing ambient temperature.* ***Aim:*** *Using a mathematical model of indirect measurement, this study developed a method for estimating errors in determining the prescription of death according to the Newton's–Richman's cooling law.* ***Material and methods:*** *Mathematical modeling of errors in determining the time of death in conditions of constant and changing ambient temperature was conducted according* *to the Newton's–Richman's law. The computer program code was drafted in the C# programming language using the Microsoft Visual Studio 2019 application.* ***Results:*** *Based on the indirect measurement model, a method for estimating the maximum absolute errors for determining the time of death during cooling according to the Newton's–Richman's law under conditions of constant and changing ambient temperature was developed. The results obtained allowed us to analytically determine errors in time the prescription of death in the early postmortem period.* ***Conclusions:*** *We developed a mathematical model for estimating maximum absolute errors while determining the time of death according to the Newton's–Richman's cooling law under conditions of constant and changing ambient temperature. The developed mathematical model was implemented as an application program Warm Bodies NRN. The proposed method might be used in forensic medical expert practice for determining the time of death.*

Keywords: *errors; the time of death; Newton's–Richman's law of cooling; mathematical modeling; indirect measurement.*

For citation: Nedugov GV. Mathematical modeling of errors for determining time of death based on the Newton's–Richman's cooling law. *Russian Journal of Forensic Medicine*. 2021;7(2):88–95. DOI: https://doi.org/10.17816/fm373

Submitted 19.02.2021 Revised 24.02.2021 Published 19.05.2021

АКТУАЛЬНОСТЬ

Обязательным элементом разработки и внедрения диагностических технологий определения давности наступления смерти (ДНС) тепловым методом является оценка их возможных погрешностей [1–3], которая осуществляется двумя путями. Первый связан с проверкой точности определения ДНС на практике или в эксперименте с последующим вычислением остаточной дисперсии и доверительных интервалов [4]. Недостатком данного подхода является сложность учета влияния на ошибки определения ДНС инструментальных погрешностей средств измерения физических параметров, входящих в состав используемой математической модели охлаждения трупа. Вследствие этого применять такие математические модели охлаждения на практике можно только при условии, что инструментальные погрешности измерительных средств конечного пользователя не превышают таковые, использованные авторами математической модели в ходе ее создания и тестирования точности.

Альтернативный подход связан с оценкой предельных абсолютных погрешностей определения ДНС на основе известной в теоретической метрологии математической модели косвенного измерения [5]. Данная модель позволяет рассматривать определение ДНС как косвенное измерение, которым в теоретической метрологии называется определение одной величины на основе прямых измерений других величин, связанных с измеряемой известной функциональной зависимостью [6]. В отличие от косвенных, прямыми в метрологии считаются измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно с помощью специальных технических средств [6]. Однако названный метод косвенного измерения пригоден только при условии детерминистского характера математической модели охлаждения трупа, лежащей в основе теплового определения ДНС.

Из всех существующих математических моделей охлаждения трупа имеют детерминистский характер только модели, основанные на законе охлаждения Ньютона–Рихмана [7]. В данных моделях ДНС является косвенно измеряемой величиной, связанной дифференцируемой зависимостью с рядом прямо измеряемых физических величин: температурой трупа и внешней среды, интервалом времени между эпизодами термометрии трупа и температурой тела в момент наступления смерти человека.

Цель исследования — разработка метода оценки погрешностей определения ДНС на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана с учетом математической модели косвенного измерения.

МАТЕРИАЛ И МЕТОДЫ

Методологический дизайн исследования представляет собой математическое моделирование погрешностей определения ДНС в условиях постоянной и изменяющейся температуры окружающей среды на базе закона Ньютона–Рихмана. Вычислительные процедуры производили с использованием приложений Microsoft Excel пакета Office 2016 и Statistica (StatSoft) версии 7.0. Операции математического анализа производили вручную, а также с использованием приложения Wolfram|Alpha. Код программы для электронно-вычислительной машины составляли на языке программирования C# с использованием приложения Microsoft Visual Studio 2019.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Математической моделью определения давности наступления смерти на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана в условиях постоянной температуры внешней среды является формула, предложенная H. Rainy в 1869 г. [8]. В современной записи это выражение имеет вид

$$t = \Delta t \frac{\ln(T_1 - T_a) - \ln(T_0 - T_a)}{\ln(T_2 - T_a) - \ln(T_1 - T_a)}, \tag{1}$$

где t — ДНС, ч; T_1 и T_2 — температура трупа, зарегистрированная при его первой и повторной термометрии соответственно, °C; Δt — интервал времени между первой и повторной термометрией трупа, ч; T_a — температура внешней среды, °C; T_0 — начальная температура в момент наступления смерти, °C.

Символически функциональную зависимость ДНС от названных физических величин можно записать как $t=f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_1, ..., x_5 — условное обозначение пяти указанных прямо измеряемых физических величин: T_1, T_2, Δt, T_a, T_0. Отсюда, зная предельные абсолютные погрешности величин T_1, T_2, Δt, T_a, T_0, можно определить и предельную абсолютную погрешность определения ДНС:

$$\Delta_t \le \sum_{i=1}^{5} \left| \frac{\partial f\left(x_1, \cdots, x_5\right)}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}, \qquad (2)$$

где Δ_t — абсолютная погрешность определения ДНС, ч; Δ_{x_i} — абсолютная погрешность результата прямого измерения i-й величины, выраженная в соответствующих единицах измерения, а частные производные функции (2) равны

$$\frac{\partial t}{\partial T_1} = \Delta t \frac{\ln\left(\frac{T_2 - T_a}{T_0 - T_a}\right)}{\left(T_1 - T_a\right) \cdot \ln^2\left(\frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}\right)},$$

$$\frac{\partial t}{\partial T_2} = -\Delta t \frac{\ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)}{\left(T_2 - T_a\right) \cdot \ln^2\left(\frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}\right)},$$

$$\frac{\partial t}{\partial T_a} = \frac{\Delta t \cdot \left(T_0 - T_a\right) \cdot \left(\frac{T_1 - T_a}{\left(T_0 - T_a\right)^2} - \frac{1}{T_0 - T_a}\right)}{\left(T_1 - T_a\right) \cdot \ln\left(\frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}\right)} -$$

$$- \frac{\Delta t \cdot \left(T_1 - T_a\right) \cdot \left(\frac{T_2 - T_a}{\left(T_1 - T_a\right)^2} - \frac{1}{T_1 - T_a}\right) \cdot \ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)}{\left(T_2 - T_a\right) \cdot \ln^2\left(\frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}\right)},$$

$$\frac{\partial t}{\partial \Delta t} = \frac{\ln\left(\frac{T_1 - T_a}{T_0 - T_a}\right)}{\ln\left(\frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}\right)}, \quad \frac{\partial t}{\partial T_0} = \frac{\Delta t}{\left(T_a - T_0\right) \cdot \ln\left(\frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a}\right)}.$$

В качестве абсолютных погрешностей результатов прямых измерений температуры трупа и окружающей среды следует принять инструментальные погрешности измерительных средств. В качестве абсолютных погрешностей показателя начальной температуры трупа и интервала времени между его первой и повторной термометрией целесообразно произвольно выбрать допустимую предельную ошибку указанных величин.

Относительная погрешность определения ДНС тогда вычисляется по формуле

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{\overline{t}} 100\%,$$

где $\overline{t}$ — результат определения ДНС согласно (1), в которой вместо значений переменных подставлены результаты их прямых измерений, условно обозначаемых как $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_5$. Следует учитывать, что начальная температура трупа не измеряется, а принимается условно равной 36,6°C в случае ее измерения в подмышечной впадине или иной соответствующей прижизненной температуре в случае ее измерения в наружных слуховых проходах, ротовой полости или глазном яблоке.

Отсюда итоговый результат определения ДНС с помощью (1) следует записать как $t = \overline{t} \pm \Delta_t$ с учетом правил ограничения количества значащих цифр в измеренном значении и его погрешности.

Формула (2) дает предельные значения абсолютных погрешностей результатов определения ДНС, т. е. такие, которые наблюдаются крайне редко при наихудшем сочетании абсолютных погрешностей всех прямо измеряемых величин. В теоретической метрологии доказывается, что в том случае, если погрешности входящих в нее прямо измеряемых величин взаимно не коррелированы, то недооценка одних величин компенсируется переоценкой других. В этом случае расчет абсолютных погрешностей определения ДНС можно производить по формуле

$$\Delta_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} \left(\frac{\partial f\left(x_1, \cdots, x_5\right)}{\partial x_i} \Delta_{x_i} \right)^2}. \qquad (3)$$

Пример 1

Температура воздуха на уровне трупа 10,0°C, температура в подмышечной впадине при первом измерении 30,7°C, при втором измерении через 1 ч после первого — 30,1°C.

Согласно (1), в данном случае ДНС будет равна

$$t = 1 \cdot \frac{\ln(30,7 - 10) - \ln(36,6 - 10)}{\ln(30,1 - 10) - \ln(30,7 - 10)} = 8,53 \text{ ч.}$$

Предположим, что инструментальная погрешность средства измерения температуры трупа и окружающей среды была равна 0,1°C. Ошибку измерения интервала времени длиной 1 ч между первым и повторным измерением температуры трупа примем равной 1 мин, а возможную ошибку начальной температуры трупа возьмем за 0,3°C. Результаты промежуточных вычислений приведены в табл. 1. Тогда абсолютная ошибка установления ДНС равна

Таблица 1. *Результаты промежуточных вычислений из примера 1*

Table 1. *Results of intermediate calculations from example 1*

x_i	$\bar{x}_i$	$\frac{\partial t}{\partial x_i}$	Δx_i		$\left(\frac{\partial t}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2$	
T_0, °C	36,6	1,278103	0,3		0,147019	
T_1, °C	30,7	–15,6451	0,1	0,01	2,447706	0,024477
T_2, °C	30,1	14,42075	0,1	0,01	2,079579	0,020796
T_a, °C	10,0	–0,0537	0,1	0,01	$2{,}884\times10^{-5}$	$2{,}884\times10^{-7}$
Δt, ч	1,000	8,525821	0,017		0,020192	

$$\Delta_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial t}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2} = 2{,}17 \text{ ч},$$

а результат ее определения должен быть записан как t=8,5±2,2 ч.

Относительная погрешность определения ДНС в данном случае составляет

$$\varepsilon_t = \frac{2{,}17}{8{,}53}100\% = 25{,}4\%.$$

Теперь положим, что результаты динамической термометрии трупа и окружающей среды в рассматриваемом примере были определены с использованием измерительного средства с инструментальной погрешностью 0,01°С. Результаты промежуточных вычислений также приведены в табл. 1. В этом случае абсолютная ошибка установления ДНС равна всего

$$\Delta_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{5}\left(\frac{\partial t}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2} = 0{,}461 \text{ ч},$$

а результат ее определения должен быть записан как t=8,53±0,46 ч.

Относительная погрешность определения ДНС в данном случае составляет уже

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}46}{8{,}53}100\% = 5{,}41\%.$$

Анализ табл. 1 показывает, что наибольший вклад в формирование величины абсолютной погрешности определения ДНС в данном случае внесли инструментальные погрешности динамической термометрии трупа. Именно поэтому при определении ДНС на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана инструментальная погрешность используемых средств термометрии не должна превышать 0,01°С. В меньшей степени повлияли на ошибку определения ДНС погрешности выбора значения температуры человека в момент его смерти и инструментальная погрешность измерения температуры внешней среды, поэтому при использовании простой экспоненциальной модели вполне допустимы ошибки определения температуры тела в момент смерти человека до 0,3°С. Также при длине временного интервала между измерениями температуры трупа 1 ч ошибки его измерения величиной до 1 мин настолько несущественны, что ими можно пренебречь.

Пользоваться формулой (3) можно только в том случае, если погрешности входящих в нее прямо измеряемых величин взаимно не коррелированы. Если же имеются основания считать, что ошибки пяти прямых измерений не независимы и случайны, то следует определять погрешности косвенного измерения по формуле (2). Использование (2) дает большую, но и более надежную оценку погрешности определения ДНС. Взаимную коррелированность прямых измерений, лежащих в основе определения ДНС, всегда следует предполагать при их регистрации одним и тем же измерительным средством. По этой причине применение формулы (2) является предпочтительным.

Приведенный алгоритм определения погрешностей определения ДНС может быть обобщен и на случай охлаждения трупа в условиях изменяющейся температуры окружающей среды. Для этого сначала также необходимо вычислить точечную оценку ДНС по формулам, учитывающим температурный тренд окружающей труп среды перед и во время его динамической термометрии. В частности, постоянную охлаждения k находим, решая неявную функцию:

$$\begin{aligned} T_1 = T_{a2} &+ \beta_1\left(\Delta t + \frac{1}{k}\right) + \beta_2\left(\Delta t^2 + \frac{2\Delta t}{k} + \frac{2}{k^2}\right) + \\ &+ \beta_3\left(\Delta t^3 + \frac{3\Delta t^2}{k} + \frac{6\Delta t}{k^2} + \frac{6}{k^3}\right) + \beta_4 \times \\ &\times\left(\Delta t^4 + \frac{4\Delta t^3}{k} + \frac{12\Delta t^2}{k^2} + \frac{24\Delta t}{k^3} + \frac{24}{k^4}\right) + \\ &+\left(T_2 - T_{a2} - \frac{\beta_1}{k} - \frac{2\beta_2}{k^2} - \frac{6\beta_3}{k^3} - \frac{24\beta_4}{k^4}\right)e^{k\Delta t}, \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где T_{a2} — температура внешней среды в момент повторной термометрии трупа, °С; k — постоянная охлаждения; β_1, ..., β_4 — коэффициенты полиномиальных аппроксимаций 1–4-й степени температурного тренда внешней среды [7].

Затем определяем ДНС, решая неявную функцию:

$$36,6 = T_{a1} + \beta_1\left(t + \frac{1}{k}\right) + \beta_2\left(t^2 + \frac{2t}{k} + \frac{2}{k^2}\right) + \beta_3\left(t^3 + \frac{3t^2}{k} + \frac{6t}{k^2} + \frac{6}{k^3}\right) + \beta_4 \times \left(t^4 + \frac{4t^3}{k} + \frac{12t^2}{k^2} + \frac{24t}{k^3} + \frac{24}{k^4}\right) + \left(T_1 - T_{a1} - \frac{\beta_1}{k} - \frac{2\beta_2}{k^2} - \frac{6\beta_3}{k^3} - \frac{24\beta_4}{k^4}\right)e^{kt}, \quad (5.1)$$

где T_{a1} — температура внешней среды в момент первой термометрии трупа, °C [7].

В отличие от стандартного алгоритма, в условиях изменяющейся температуры окружающей среды определение ДНС производится не в один, а в два этапа: сначала вычисляется постоянная охлаждения, а затем на основе полученного значения постоянной охлаждения — ДНС. Именно поэтому при использовании закона Ньютона–Рихмана в условиях изменяющейся температуры внешней среды погрешности определения ДНС также вычисляются в два этапа: сначала определяется погрешность постоянной охлаждения, а затем собственно ДНС.

Постоянная охлаждения в условиях изменяющейся температуры внешней среды является неявной функцией (4.1) четырех независимых прямо измеряемых физических величин: температуры трупа при первом и повторном измерениях, температуры окружающей среды на момент повторной термометрии трупа и интервала времени между первой и повторной термометриями трупа. После размещения всех слагаемых по одну сторону от знака равенства символически указанную функциональную зависимость можно записать как

$$F(k, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (4.2)$$

где k — постоянная охлаждения, x_1, ..., x_4 — условное обозначение названных прямо измеряемых физических величин: температуры T_1, T_2, T_{a2} и интервала времени Δt.

Для определения погрешности постоянной охлаждения нужно задать предельные абсолютные погрешности указанных прямо измеряемых физических величин и вычислить все частные производные неявной функции (4.1), приведенной к виду (4.2) по формуле

$$\frac{\partial k}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_k},$$

где

$$F'_{Ta2} = 1 - e^{k\Delta t},\ F'_{T_2} = e^{k\Delta t},\ F'_{T_1} = -1,$$

$$F'_k = \Delta t e^{k\Delta t}\left(T_2 - T_{a2} - \frac{24\beta_4}{k^4} - \frac{6\beta_3}{k^3} - \frac{2\beta_2}{k^2} - \frac{\beta_1}{k}\right) + e^{k\Delta t}\left(\frac{96\beta_4}{k^5} + \frac{18\beta_3}{k^4} + \frac{4\beta_2}{k^3} + \frac{\beta_1}{k^2}\right) - \frac{\beta_1}{k^2} - \beta_2\left(\frac{4}{k^3} + \frac{2\Delta t}{k^2}\right) - \beta_3\left(\frac{18}{k^4} + \frac{12\Delta t}{k^3} + \frac{3\Delta t^2}{k^2}\right) - \beta_4\left(\frac{96}{k^5} + \frac{72\Delta t}{k^4} + \frac{24\Delta t^2}{k^3} + \frac{4\Delta t^3}{k^2}\right),$$

$$F'_t = ke^{k\Delta t}\left(T_2 - T_{a2} - \frac{\beta_1}{k} - \frac{2\beta_2}{k^2} - \frac{6\beta_3}{k^3} - \frac{24\beta_4}{k^4}\right) + \beta_1 + \beta_2\left(\frac{2}{k} + 2\Delta t\right) + \beta_3\left(\frac{6}{k^2} + \frac{6\Delta t}{k} + 3\Delta t^2\right) + \beta_4\left(\frac{24}{k^3} + \frac{24\Delta t}{k^2} + \frac{12\Delta t^2}{k} + 4\Delta t^3\right).$$

Тогда предельная абсолютная погрешность постоянной охлаждения будет равна сумме произведений частных производных (4.2) на соответствующие абсолютные погрешности:

$$\Delta_k = \sum_{i=1}^{4}\left|\frac{\partial k}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}. \quad (6)$$

Поскольку неявные функции для вычисления постоянной охлаждения для полиномиальных аппроксимаций изменений температуры окружающей среды меньших степеней являются частными случаями (4.1), то значения их частных производных получают, приравнивая в формулах значения соответствующих коэффициентов β_i нулю.

После установления предельной абсолютной погрешности коэффициента k можно вычислять аналогичную погрешность определения ДНС. Последняя в условиях изменяющейся температуры окружающей труп среды сама является неявной функцией четырех взаимно независимых величин: температуры трупа и окружающей среды при первом их измерении, температуры тела в момент смерти человека и постоянной охлаждения. После размещения всех слагаемых по одну сторону от знака равенства символически указанную функциональную зависимость можно записать как

$$F(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \quad (5.2)$$

где t — ДНС, ч; x_1, ..., x_4 — условное обозначение температур T_1, T_{a1}, T, C^0 и k.

Для вычисления погрешности определения ДНС нужно задать предельные абсолютные погрешности величин T_{a1} и T, принять заданное ранее значение предельной абсолютной погрешности T_1 и вычисленное на предыдущем этапе значение предельной абсолютной погрешности постоянной k и вычислить все частные производные полученной неявной функции по формуле

$$\frac{\partial t}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_t},$$

где

$$F'_{Ta1} = 1 - e^{kt},\ F'_{T_1} = e^{kt},\ F'_T = -1,$$

$$F'_k = te^{kt}\left(T_1 - T_{a1} - \frac{24\beta_4}{k^4} - \frac{6\beta_3}{k^3} - \frac{2\beta_2}{k^2} - \frac{\beta_1}{k}\right) +$$
$$+ e^{kt}\left(\frac{96\beta_4}{k^5} + \frac{18\beta_3}{k^4} + \frac{4\beta_2}{k^3} + \frac{\beta_1}{k^2}\right) -$$
$$- \frac{\beta_1}{k^2} - \beta_2\left(\frac{4}{k^3} + \frac{2t}{k^2}\right) - \beta_3\left(\frac{18}{k^4} + \frac{12t}{k^3} + \frac{3t^2}{k^2}\right) -$$
$$- \beta_4\left(\frac{96}{k^5} + \frac{72t}{k^4} + \frac{24t^2}{k^3} + \frac{4t^3}{k^2}\right),$$

$$F'_t = ke^{kt}\left(T_1 - T_{a1} - \frac{\beta_1}{k} - \frac{2\beta_2}{k^2} - \frac{6\beta_3}{k^3} - \frac{24\beta_4}{k^4}\right) + \beta_1 + \beta_2\left(\frac{2}{k} + 2t\right) +$$
$$+ \beta_3\left(\frac{6}{k^2} + \frac{6t}{k} + 3t^2\right) + \beta_4\left(\frac{24}{k^3} + \frac{24t}{k^2} + \frac{12t^2}{k} + 4t^3\right).$$

Тогда предельная абсолютная погрешность определения ДНС будет равна сумме произведений частных производных (5.2) на соответствующие абсолютные погрешности:

$$\Delta_t = \sum_{i=1}^{4}\left|\frac{\partial t}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i}. \tag{7}$$

Целесообразно получить более реалистичные оценки предельных погрешностей определения ДНС, предполагая взаимную некоррелированность прямо измеряемых физических величин на этапе определения предельной абсолютной погрешности постоянной охлаждения. С учетом этого формулу (6) следует заменить выражением

$$\Delta_k = \sqrt{\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial k}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right)^2}. \tag{8}$$

Пример 2

При измерении температуры трупа в его наружных слуховых проходах получены значения T_1=29,73°C и T_2=28,97°C при температуре среды T_{a1}=19,51°C и T_{a2}=19,01°C. Интервал между замерами температуры составлял 1 ч. Тимпаническая термометрия выполнялась с помощью инфракрасного термометра DT-635. Согласно инструкции к указанному измерительному средству, предельная абсолютная погрешность термометра DT-635 равна 0,2°C. Инструментальная погрешность средства измерения внешней среды была равна 0,1°C. Предельную ошибку измерения интервала времени длиной 1 ч между первой и повторной термометрией трупа возьмем равной 15 с, а начальной температуры — за 1,0°C. Начальную температуру наружного слухового прохода, согласно данным M.S. Ganio и соавт., примем равной 36,7°C [9]. Необходимо определить предельную абсолютную погрешность установления ДНС по приведенным данным, предполагая линейный характер изменений температуры внешней среды.

Точечные оценки постоянной охлаждения и ДНС находим по формулам (4.1) и (5.1), учитывая, что по условиям задачи регрессионный коэффициент полиномиальной аппроксимации температурного тренда внешней среды β_1=0,5°C, а остальные регрессионные коэффициенты равны нулю. В этом случае k=0,075334, а ДНС составляет 8,01 ч.

Согласно (8) определяем предельную абсолютную погрешность постоянной охлаждения. Результаты промежуточных вычислений и искомые величины Δ_k приведены в табл. 2. С учетом полученных для раз-

Таблица 2. *Результаты промежуточных вычислений погрешности постоянной охлаждения для данных из примера 2*

Table 2. *Results of intermediate calculations of errors in the cooling constant for the data from example 2*

Прямые измерения		F'_{x_i}		$-\frac{F'_{x_i}}{F'_k}$	Δx_i		$\left(\frac{\partial k}{\partial x_i}\Delta_{x_i}\right)^2$	
T_{a2}, °C	19,01	F'_{Ta2}	−0,07824	0,007469	0,1	0,01	$5{,}578\times10^{-7}$	$5{,}578\times10^{-9}$
T_2, °C	28,97	F'_{T_2}	1,078245	−0,10292	0,2	0,01	0,000424	$1{,}059\times10^{-6}$
T_1, °C	29,73	F'_{T_1}	−1	0,095453	0,2	0,01	0,000364	$9{,}111\times10^{-7}$
Δt, ч	1	$F'_{\Delta t}$	0,769916	−0,07349	0,004167		$9{,}376\times10^{-8}$	
Косвенное измерение		F'_k	10,4764	-				
		Δ_k	0,028086			0,001439		

Таблица 3. *Результаты промежуточных вычислений абсолютной погрешности определения ДНС для данных из примера 2*

Table 3. *Results of intermediate calculations of the absolute error in determining the time of death for the data from example 2*

Прямые измерения		F'_{x_i}		$-\frac{F'_{x_i}}{F'_t}$	Δx_i		$\left\lvert\frac{\partial t}{\partial x_i}\right\rvert \Delta x_i$	
T_{a1}, °C	19,51	F'_{Ta1}	−0,82796	0,833463	0,1	0,01	0,083346	0,008335
T_1, °C	29,73	F'_{T_1}	1,827958	−1,84011	0,2	0,01	0,368022	0,018401
T, °C	36,7	F'_T	−1	1,006648	1	0,5	1,006648	0,503324
Косвенные измерения		F'_k	125,3857	−126,219	0,028086	0,001439	3,544967	0,181587
		F'_t	0,993396	-				
		Δ_t	5,00298341			0,711646353		

ных инструментальных погрешностей термометрии значений Δ_k по формуле (7) вычисляем предельную абсолютную погрешность определения ДНС. Данные промежуточных вычислений и искомые величины Δ_t приведены в табл. 3, из которой видно, что основную часть итоговой погрешности определения ДНС составляет погрешность постоянной охлаждения, на которую, в свою очередь, оказывают основное влияние два прямых измерения температуры трупа. В итоге предельная абсолютная погрешность определения ДНС при комплексе заданных условий равна 5,00 ч, а итоговый результат следует записать как t=8,0±5,0 ч.

Аналогичная ошибка для инструментальной погрешности термометрии трупа и внешней среды величиной 0,01°C и начальной температуры трупа величиной 0,5°C при прочих равных условиях составляет всего 0,711 ч, а итоговый результат определения ДНС следует записать как t=8,01±0,71 ч.

При этом 71% величины предельной абсолютной погрешности составляет ошибка начальной температуры трупа (см. табл. 2, 3). В новых условиях на погрешность постоянной охлаждения начинает оказывать влияние также и погрешность определения интервала времени между первой и повторной термометрией трупа. Следовательно, в условиях изменяющейся температуры окружающей среды желательно уменьшение инструментальной погрешности термометрии трупа как минимум до 0,01°C, а погрешности измерения интервала времени длиной 1 ч между эпизодами термометрии — до 15 с.

Таким образом, при условии корректного выбора диагностической зоны и полного соответствия температурного тренда внешней среды его полиномиальной аппроксимации наиболее существенное значение для формирования итоговой ошибки определения ДНС имеют инструментальные погрешности термометрии трупа и внешней среды.

В частности, при определении ДНС на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана инструментальная погрешность используемых средств термометрии должна быть не менее 0,01°C. В меньшей степени влияют на ошибки определения ДНС погрешности выбора температуры человека в момент его смерти. Так, вполне допустимы ошибки определения температуры тела в момент смерти человека до 0,5°C, а погрешности измерения интервала времени длиной 1 ч между эпизодами термометрии — до 15 с.

Для избавления пользователя от выполнения трудоемких математических операций изложенный алгоритм определения ДНС и ее погрешностей был реализован на языке C# в формате программы для электронно-вычислительной машины Warm Bodies NRN (свидетельство о государственной регистрации № 2021611972). Данная программа предназначена для определения ДНС на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана как в условиях постоянной, так и изменяющейся температуры внешней среды [7]. Программа поддерживает любые полиномиальные аппроксимации температурного тренда внешней среды 1–4-й степени. При постоянной температуре окружающей среды приложение находит ДНС аналитически по формуле (1). Расчеты ДНС в условиях изменяющейся температуры внешней среды осуществляются программой по методу обратного воспроизведения охлаждения трупа [7]. Для этого приложение решает неявные функции (4.2) и (5.2). Поиск корней всех неявных функций реализуется методом касательных Ньютона. Затем программа рассчитывает предельные абсолютные погрешности определения ДНС с учетом инструментальных погрешностей средств измерения температуры и времени на основе математической модели косвенного измерения, изложенной в серии формул (2), (7), (8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель оценки предельных абсолютных погрешностей определения ДНС на основе закона охлаждения Ньютона–Рихмана в условиях постоянной и изменяющейся температуры внешней среды. Разработанная математическая модель определения ДНС и ее предельных абсолютных погрешностей реализована в формате прикладной программы Warm Bodies NRN.

Предложенный метод целесообразно использовать в судебно-медицинской экспертной практике при определении ДНС.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Участие авторов • Author contribution

Автор подтверждает соответствие своего авторства международным критериям ICMJE (разработка концепции, проведение исследования и подготовка статьи, одобрение финальной версии перед публикацией).

The author made a substantial contribution to the conception of the work, acquisition, analysis, interpretation of data for the work, drafting and revising the work, final approval of the version to be published and agree to be accountable for all aspects of the work.

Источник финансирования • Funding source

Автор заявляет об отсутствии внешнего финансирования при проведении исследования.

This study was not supported by any external sources of funding.

Конфликт интересов • Competing interests

Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов, связанных с публикацией настоящей статьи.

The author declare that they have no competing interests.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kanawaku Y., Kanetake J., Komiya A., et al. Effects of rounding errors on postmortem temperature measurements caused by thermometer resolution // *Int J Legal Med.* 2007. Vol. 121, N 4. P. 267–273. doi:10.1007/s00414-006-0088-8
2. Verica P., Janeska B., Gutevska A., Duma A. Post mortem cooling of the body and estimation of time since death // *Soud Lek.* 2007. Vol. 52, N 4. P. 50–56.
3. Вавилов А.Ю., Халиков А.А. О минимизации ошибок термометрического метода определения давности смерти // *Проблемы экспертизы в медицине*. 2009. Т. 9, № 1. С. 11–14.
4. Henssge C. Rectal temperature time of death nomogram: dependence of corrective factors on the body weight under stronger thermic insulation conditions // *Forensic Sci Int*. 1992. Vol. 54, N 1. P. 51–66. doi: 10.1016/0379-0738(92)90080-g
5. Hubig M., Muggenthaler H., Sinicina I., Mall G. Body mass and corrective factor: impact on temperature-based death time estimation // *Int J Legal Med*. 2011. Vol. 125, N 3. P. 437–444. doi: 10.1007/s00414-011-0551-z
6. Тейлор Д. Введение в теорию ошибок. Пер. с англ. Москва: Мир, 1985.
7. Недугов Г.В. Математическое моделирование охлаждения трупа в условиях изменяющейся температуры окружающей среды // *Судебная медицина*. 2021. Т. 7, № 1. С. 29–35. doi: 10.17816/fm360
8. Rainy H. On the cooling of dead bodies as indicating the length of time that has elapsed since death // *Glasgow Med J.* 1869. Vol. 1, N 3. P. 323–330.
9. Ganio M.S., Brown C.M., Casa D.J., et al. Validity and reliability of devices that assess body temperature during indoor exercise in the heat // *J Athl Train*. 2009. Vol. 44, N 2. P. 124–135. doi: 10.4085/1062-6050-44.2.124

REFERENCES

1. Kanawaku Y, Kanetake J, Komiya A, et al. Effects of rounding errors on postmortem temperature measurements caused by thermometer resolution. *Int J Legal Med.* 2007;121(4):267–273. doi:10.1007/s00414-006-0088-8
2. Verica P, Janeska B, Gutevska A, Duma A. Post mortem cooling of the body and estimation of time since death. *Soud Lek.* 2007;52(4):50–56.
3. Vavilov AYu, Khalikov AA. About minimization of mistakes of thermometry's method of definition of prescription of death. *Medical examination problems.* 2009;9(1):11–14. (In Russ).
4. Henssge C. Rectal temperature time of death nomogram: dependence of corrective factors on the body weight under stronger thermic insulation conditions. *Forensic Sci Int*. 1992; 54(1):51–66. doi: 10.1016/0379-0738(92)90080-g
5. Hubig M, Muggenthaler H, Sinicina I, Mall G. Body mass and corrective factor: impact on temperature-based death time estimation. *Int J Legal Med*. 2011;125(3): 437–444. doi: 10.1007/s00414-011-0551-z
6. Taylor JR. An introduction to error analysis. Moscow: Mir; 1985. (In Russ).
7. Nedugov GV. Mathematical modeling of the corpse cooling under conditions of varying ambient temperature. *Russian Journal of Forensic Medicine*. 2021;7(1):29–35. doi: 10.17816/fm360
8. Rainy H. On the cooling of dead bodies as indicating the length of time that has elapsed since death. *Glasgow Med J.* 1869;1(3): 323–330.
9. Ganio MS, Brown CM, Casa DJ, et al. Validity and reliability of devices that assess body temperature during indoor exercise in the heat. *J Athl Train*. 2009;44(2):124–135. doi: 10.4085/1062-6050-44.2.124

ОБ АВТОРАХ

* **НЕДУГОВ Герман Владимирович**, к.м.н., доцент кафедры судебной медицины; адрес: Российская Федерация, 443099, Самара, ул. Чапаевская, д. 89; e-mail: nedugovh@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7380-3766

AUTHORS INFO

German V. Nedugov, MD, Cand. Sci. (Med.), Assistant Professor; address: 89 Chapaevskaya st., Samara, 443099, Russia; e-mail: nedugovh@mail.ru, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7380-3766